UNIVERSIDAD SIMÓN BOLÍVAR
MATEMÁTICAS II (MA-1112)

Elaborado por
Cristhian Da Silva
12-10305
Ing. Telecom

Verano 2016 - PREPA Nro 3.

Integrales

Resolución Segundo Parcial 2014 Ene-Mar.

Ejercicio 1. (7 puntos) Calcule:

$$\int \cos(\ln(x))dx$$

En primer lugar, multiplicamos por la identidad $\frac{x}{x}$ de manera que:

$$\int \cos(\ln(x))dx = \int \cos(\ln(x))\frac{x}{x}dx$$

Ahora, realizaremos el cambio de variable: $\ln(x) = u$, el cual al derivarlo obtenemos $\frac{dx}{x} = du$, de esta manera la integral resultante será:

$$\int \cos(\ln(x))dx = \int \cos(u).e^u du = I$$

Entonces, basta con realizar integración por partes y obtenemos:

$$I = \cos(u).e^u + \int \operatorname{sen}(u).e^u du + c$$

De nuevo, integraremos $\int \operatorname{sen}(u).e^u du = H$ y tendremos:

$$H = \operatorname{sen}(u).e^u - \int \cos(u).e^u du = C$$

Entonces:

$$I = \cos(u).e^u + \operatorname{sen}(u).e^u - \int \cos(u).e^u du + c + C$$

Pero sabemos que $I = \displaystyle\int \cos(u).e^u du$,(c y C son constantes de manera que $C + c = K$), por lo tanto:

$$I = \cos(u).e^u + \operatorname{sen}(u).e^u - I + K$$

Así mismo,

$$2I = \cos(u).e^u + \operatorname{sen}(u).e^u + K$$

De manera que obtendremos:

$$\int \cos(u).e^u du = \frac{\cos(u).e^u + \operatorname{sen}(u).e^u + K}{2}$$

Finalmente, devolviendo el cambio de variable obtendremos la integral pedida:

$$\boxed{\int \cos(\ln(x))dx = \frac{\cos(\ln(x)).x + \operatorname{sen}(\ln(x)).x + K}{2}}$$

SOLUCIÓN

Ejercicio 2. (7 puntos) Halle la antiderivada general de la función: $\tan^5(x).\sec^7(x)$

Nos piden hallar la siguiente antiderivada:

$$I = \int \tan^5(x).\sec^7(x)dx$$

Sin embargo se puede reescribir como

$$I = \int \tan^4(x).\sec^6(x).\tan(x).\sec(x)dx$$

Ahora, aplicaremos la identidad trigonometrica $\tan^2 = \sec^2 - 1$, Además, se debe hacer el cambio de variable $\sec(x) = u$ lo que implica que $\sec(x).\tan(x)dx = du$, de manera que la nueva integral será:

$$I=\int (u^2-1)^2.u^6du=\int (u^4-2u^2+1).u^6du=\int (u^{10}-2u^8+u^6)du$$

Ahora, resolviendo las integrales tendremos que:

$$I=\frac{u^7}{7}-\frac{2u^9}{9}+\frac{u^{11}}{11}+C$$

Finalmente, devolviendo el cambio de variable quedará que:

$$\boxed{\int \tan^5(x).\sec^7(x)dx=\frac{\sec(x)^7}{7}-\frac{2\sec(x)^9}{9}+\frac{\sec(x)^{11}}{11}+C}$$

SOLUCIÓN

<u>**Ejercicio 3.**</u> (7 puntos) Evalúe:

$$\int_0^{\sqrt{5}} x^2\sqrt{5-x^2}dx=I$$

En primer lugar se realiza el cambio de variable $x=\sqrt{5}\operatorname{sen}(\theta)$ lo que implica $dx=\sqrt{5}\cos(\theta)d\theta$.

Evaluamos, si $x=\sqrt{5}\rightarrow\theta=\arcsin(1)=\frac{\pi}{2}$ y si $x=0\rightarrow\theta=\arcsin(0)=0$, De manera que estos serán los nuevos límites de integración, y queda:

$$I=\int_0^{\sqrt{5}} x^2\sqrt{5-x^2}dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}} 5\operatorname{sen}^2(\theta)\sqrt{5-5\operatorname{sen}^2(\theta)}\sqrt{5}\cos(\theta)d\theta\ =$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}} 5\operatorname{sen}^2(\theta)\sqrt{5}\sqrt{1-\operatorname{sen}^2(\theta)}\sqrt{5}\cos(\theta)d\theta\ =\int_0^{\frac{\pi}{2}} 5\operatorname{sen}^2(\theta)5\sqrt{\cos^2(\theta)}\cos(\theta)d\theta=$$

$$=25\int_0^{\frac{\pi}{2}}\operatorname{sen}^2(\theta)\cos^2(\theta)d(\theta)$$

Ahora, si se aplican las razones de angulos medios de la trigonometría $\operatorname{sen}^2(\theta)=\frac{(1-\cos(2\theta))}{2}$ y $\cos^2(\theta)=\frac{(1+\cos(2\theta))}{2}$, la integral quedará de la siguiente forma:

$$I=25\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{(1-\cos(2\theta))(1+\cos(2\theta))}{4}d\theta=25\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{(1-\cos^2(2\theta))}{4}d\theta=$$

$$= 25[\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\theta}{4} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^2(2\theta)}{4}]d\theta$$

Se aplica nuevamente la razón de angulos medios $\dfrac{\cos^2(2\theta)}{4} = \dfrac{(1+\cos(4\theta))}{8}$, y la integral será:

$$I = 25[\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\theta}{4} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\theta}{8} + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos(\,4\theta)}{8} d\theta]$$

Resolviendo las integrales se obtiene:

$$\boxed{I = 25[\frac{\theta}{4} - \frac{\theta}{8} + \frac{\operatorname{sen}(4\theta)}{8}]|_0^{\frac{\pi}{2}} = 25[\frac{\pi}{8} - \frac{\pi}{16} + \frac{\operatorname{sen}(2\pi)}{8}] = 25[\frac{\pi}{16}] = \frac{25\pi}{16}}$$

SOLUCIÓN

Ejercicio 4. (7 puntos) Calcule:

$$\int \frac{dx}{2\operatorname{senh}(x) + 6\cosh(x)} = I$$

Inicialmente, sabemos que: $\operatorname{senh}(x) = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2}$ y que $\cosh(x) = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$, de manera que la integral queda:

$$I = \int \frac{dx}{e^x - e^{-x} + 3e^x - 3e^{-x}} = \int \frac{dx}{4e^x + 2e^{-x}}$$

Multiplicando por la identidad $\dfrac{e^x}{e^x}$ queda:

$$I = \int \frac{e^x dx}{4(e^x)^2 + 2} = \int \frac{e^x dx}{4[(e^x)^2 + \frac{1}{2}]}$$

Se realiza el cambio de variable $u = e^x$ lo que implica $e^x dx = du$ y la integral queda:

$$I = \int \frac{du}{4[(u)^2 + \frac{1}{2}]} = \int \frac{du}{4[(u)^2 + (\frac{1}{\sqrt{2}})^2]} = \frac{\sqrt{2}}{4}\arctan(\sqrt{2}u) + C$$

Finalmente, devolviendo el cambio de variable queda:

$$\boxed{\int \frac{dx}{2\,\mathrm{senh}(x)+6\cosh(x)} = \frac{\sqrt{2}}{4}\arctan(\sqrt{2}e^{x})+C}$$

SOLUCIÓN

<u>**Ejercicio 5.**</u> (7 puntos) Calcule:

$$\int \frac{x}{2+\sqrt{1+x}}dx = I$$

Se inicia realizando el siguiente cambio de variable $1+x=u^2$ lo que implica que $dx=2udu$ y la integral queda:

$$I = \int \frac{u^2-1}{2+u}2udu = \int \frac{2u^3-2u}{2+u}du$$

Ahora, realizando la division de polinomios obtendremos que el resultado será $Q(x)=2u^2-4u+6$ y el resto será $R(x)=-12$, por lo tanto sabiendo que $\dfrac{A(x)}{D(x)} = \dfrac{R(x)}{D(x)} + Q(x)$ la nueva integral será:

$$I = \int (\frac{-12}{2+u} + 2u^2 - 4u + 6)du = -12\ln(u+2) + \frac{2}{3}u^3 + 2u^2 + 6u + C$$

Finalmente, devolviendo el cambio de variable se obtiene que:

$$\boxed{\int \frac{x}{2+\sqrt{1+x}}dx = -12\ln(\sqrt{1+x}+2) + \frac{2}{3}\sqrt{x+1}^{3} - 2x - 2 + 6\sqrt{1+x} + C}$$

SOLUCIÓN

Nota: Este material fue elaborado por Cristhian Da Silva con ejercicios obtenidos del segundo parcial de Enero-Marzo del 2014, y fue realizado para el uso de toda la comunidad académica.

Cristhian Da Silva
Carnet: 12-10305
Ingeniería Telecomunicaciones
Twitter: @CristhianDaS

Se agradece notificar cualquier error de tipeo o en las respuestas y qué debería decir a la dirección gecousb@gmail.com